Математичко такмичење „Кенгур без граница” финале 2017.
9 – 10. разред

Задаци који вреде 3 поена

1. $\dfrac{2017}{2018} - \dfrac{2017002017}{2018002018} =$

А) $-\dfrac{1}{10000}$ **Б)** $\dfrac{1}{1000}$ **В)** -1 **Г)** $\dfrac{1}{2018}$ **Д)** 0

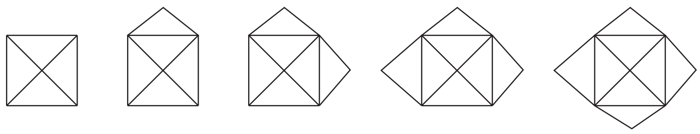
2. Нека $|X|$ означава број елемената скупа X. Ако за скупове A и B важи да је $|A \setminus B| = 19$, $|A \cap B| = 5$ и $|B| = 13$, тада је $|A \cup B|$ једнако:

А) 14 **Б)** 23 **В)** 32 **Г)** 80 **Д)** 33

3. Када се две наспрамне странице правоугаоника повећају за 60%, а друге две повећају за 40%, за колико се повећа његова површина?

А) 50% **Б)** 100% **В)** 124% **Г)** 125% **Д)** 224%

4. Колико фигура приказаних на слици се може нацртати тако да се не подиже оловка са папира и да се ни преко једне дужи не прелази два пута?

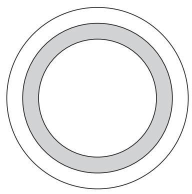


А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3 **Д)** 4

5. 200 природних бројева је написано у низ тако да сваки паран број има бар једног непарног суседа. Колико највише парних бројева може бити у низу?

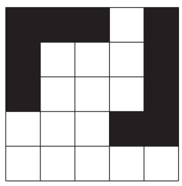
А) 100 **Б)** 111 **В)** 122 **Г)** 133 **Д)** 144

6. На слици десно приказана су три концентична круга полупречника 3, 4 и 5. Колики је однос површина осенченог дела и круга највећег полупречника?



А) $\dfrac{1}{5}$ **Б)** $\dfrac{1}{4}$ **В)** $\dfrac{7}{25}$ **Г)** $\dfrac{3}{10}$ **Д)** $\dfrac{1}{3}$

7. Селена поставља (без преклапања) картонске фигуре које се састоје од 5 јединичних квадрата на квадратну таблу приказану на слици десно. Коју од понуђених 5 фигура она мора да постави на празан део табле тако да на табли нема више места ни за једну од преосталих 4 фигуре?



А)  **Б)**  **В)**  **Г)**  **Д)** 

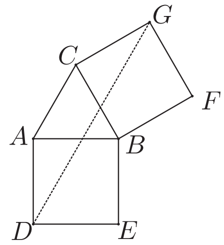
8. Бројеви A, B и C су различити елементи скупа $\{2,3,4\}$. Која је најмања могућа вредност израза A^{B^C}?

А) 2^{3^4} **Б)** 2^{4^3} **В)** 3^{2^4} **Г)** 4^{2^3} **Д)** 4^{3^2}

9. Фудбалски навијачи су путовали на утакмицу са 32 минибуса. У почетку је у сваком минибусу био исти број навијача. Међутим, на путу се покварило 8 минибусева и навијачи из свих покварених минибусева су прешли у остале и то исти број навијача у сваки од преосталих, исправних, минибусева. Након тога у сваком исправном минибусу било је по два навијача више. Колико је навијача кренуло на утакмицу?

А) 48 **Б)** 144 **В)** 192 **Г)** 256 **Д)** 384

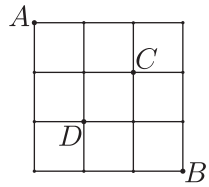
10. Над страницама AB и BC једнакостраничног троугла ABC странице дужине a, конструисани су споља квадрати $ABED$ и $BCGF$, као на слици десно. Дужина дужи DG је:



А) $a(\sqrt{2}+1)$ **Б)** $a(2\sqrt{2}+1)$ **В)** $a(\sqrt{3}+1)$
Г) $a\sqrt{3}$ **Д)** 1

Задаци који вреде 4 поена

11. Мали мрав се креће по линијама квадратне мреже од тачке A до тачке B (види слику десно), али тако да мора да прође кроз тачку C или тачку D. Ако се мали мрав креће само надесно и надоле, колико различитих путева постоји?

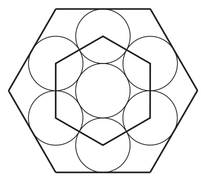


А) 6 **Б)** 9 **В)** 12 **Г)** 18 **Д)** 24

12. На једном коктелу количник броја присутних жена и броја присутних мушкараца био је тачно 0,24. Колики је најмањи могући број учесника на том коктелу?

А) 25 **Б)** 31 **В)** 35 **Г)** 48 **Д)** 64

13. У правилан шестоугао странице дужине a уписано је 7 кругова једнаких полупречника као што је приказано на слици десно. Одредити однос обима почетног шестоугла и шестоугла чија су темена центри кругова који додирују централни круг.



А) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **Б)** $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ **В)** $\dfrac{3}{2}$ **Г)** $\dfrac{5}{3}$ **Д)** $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

14. Бели правоугаоник димензија 9×10 са црвеним страницама подељен је на 90 јединичних квадрата. Сви јединични квадрати који имају црвену страницу су затим обојени у црвено. Након тога су сви квадрати који имају бар једну заједничку страницу са црвеним квадратима обојени у зелено. Колико је белих квадрата остало?

А) 20 **Б)** 22 **В)** 30 **Г)** 42 **Д)** 56

15. Цене воћа у супермаркету су се током три дана мењале на следећи начин: у понедељак су 3 банане коштале исто као један лимун и једна јабука заједно. У уторак је цена сваког воћа смањена за исти износ, па су онда две јабуке коштале исто као 3 банане и један лимун заједно. У среду је један лимун коштао 10 динара. Колико је коштала једна јабука у понедељак?

А) 5 **Б)** 10 **В)** 15 **Г)** 20 **Д)** није могуће одредити

16. Последња цифра броја $2^{2017} + 0^{2017} + 1^{2017} + 7^{2017}$ је:

А) 0 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** 8 **Д)** 9

17. У правоуглом троуглу ABC (са правим углом у темену A) тежишне дужи AE и BD су међусобно нормалне. Ако је дужина катете AB једнака 12, тада је дужина хипотенузе BC једнака:

А) 13 **Б)** 18 **В)** 24 **Г)** $12\sqrt{2}$ **Д)** $12\sqrt{3}$

18. Три пријатеља, Михајло, Матија и Јован, играју бадминтон. Победник у мечу између два учесника игра поново са трећим учесником у наредном мечу и тако редом. Ако Михајло одигра 17 мечева, а Матија одигра 23 меча, колико је најмање мечева могао да одигра Јован?

А) 6 **Б)** 14 **В)** 16 **Г)** 17 **Д)** немогуће је одредити

19. Дужина ивице чврсте дрвене коцке, изражене у центриметрима, је природан број већи од 2. Спољашњост коцке обојена је плавом бојом, а затим је коцка исечена на мале коцке чије су ивице дужине $1\,\mathrm{cm}$. Број малих коцки са тачно једном плавом страном је десет пута већи од броја малих коцки са тачно две плаве стране. Дужина ивице коцке пре сечења је:

А) $16\,\mathrm{cm}$ **Б)** $18\,\mathrm{cm}$ **В)** $20\,\mathrm{cm}$ **Г)** $22\,\mathrm{cm}$ **Д)** $24\,\mathrm{cm}$

20. Две свеће су исте дужине. Прва гори 10 сати док потпуно не изгори, а друга гори 8 сати док потпуно не изгори. Обе свеће су упаљене у подне. У колико сати ће дужина прве свеће бити двоструко дужа од дужине друге свеће?

А) 18.40 **Б)** 19.00 **В)** 19.20 **Г)** 19.40 **Д)** 20.00

Задаци који вреде 5 поена

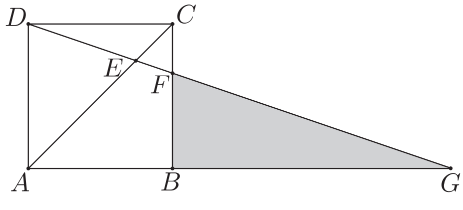
21. За реалан број x написано је следећих пет неједнакости: (1) $2x > 130$; (2) $x < 200$; (3) $3x > 50$; (4) $x > 20$; (5) $x > 15$. Знамо да су две неједнакости тачне, а три нетачне. Тачне неједнакости су:

А) 1 и 3 **Б)** 2 и 3 **В)** 2 и 4 **Г)** 2 и 5 **Д)** 4 и 5

22. Написани су сви делиоци природног броја N сем 1 и N. Највећи написани делилац је 35 пута већи од најмањег написаног делиоца. Колико природних бројева N задовољава ту особину?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** више од 4

23. Нека у квадрату $ABCD$ дуж DF сече дијагоналу AC у тачки E, тако да је $DE = 3$ и $EF = 1$ и нека је тачка G у пресеку правих DF и AB (видети слику).



Површина троугла BFG је:

А) $\dfrac{50}{3}$ **Б)** $\dfrac{24}{5}$ **В)** $\dfrac{48}{5}$ **Г)** $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$ **Д)** 10

24. Природан број n је написан само цифрама 8 и 9, при чему се обе морају појављивати бар једном. Колико цифара има најмањи такав број који је дељив и са 8 и са 9?

А) 10 **Б)** 9 **В)** 8 **Г)** 6 **Д)** 4

25. Кутије су нумерисане редом бројевима $1, 2, 3, \ldots$. У кутији са бројем 1 налази се куглица обележена бројем 1. У кутији са бројем 2 налазе се две куглице, обележене бројевима 2 и 3. У кутији са бројем 3 налазе се три куглице, обележене бројевима 4, 5 и 6, и тако даље. У којој кутији ће бити куглица обележена бројем 2017?

А) 50 **Б)** 53 **В)** 60 **Г)** 63 **Д)** 64

26. За природне бројеве a, b, c и d важе једнакости: $a + b = \frac{1}{2}(c + d)$, $a + c = 2(b + d)$ и $a + d = \frac{3}{2}(b + c)$. Која је најмања могућа вредност бројевног израза $a + b + c + d$?

А) 4 **Б)** 10 **В)** 20 **Г)** 30 **Д)** није могуће одредити

27. Милан има 5 штапова чије су дужине a, b, c, d и e и важи да је $a < b < c < d < e$. Од само три своја штапа он није могао да направи троугао. Штапови од којих није могао да направи троугао имају дужине:

А) a, b и e **Б)** b, c и d **В)** a, b и c **Г)** a, d и e **Д)** c, d и e

28. У трапезу $ABCD$, површине $32\,\mathrm{cm}^2$, тачке M и N су средишта страница AB и BC, респективно. Основица AB је 3 пута дужа од основице CD. Површина троугла DMN је:

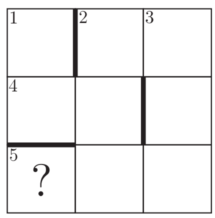
А) $8\,\mathrm{cm}^2$ **Б)** $10\,\mathrm{cm}^2$ **В)** $12\,\mathrm{cm}^2$ **Г)** $16\,\mathrm{cm}^2$ **Д)** $20\,\mathrm{cm}^2$

29. Милош је написао неколико различитих природних бројева на табли. Геометријска средина најмања два од њих је 4, а геометријска средина највећа два је 15. Колики је збир свих бројева које је Милош написао на табли?

А) 38 **Б)** 42 **В)** 44 **Г)** 243 **Д)** немогуће је одредити

30. На квадратној табли димензија 3×3 решаваћемо бројевну укрштеницу (видети слику). Зна се да свако поље садржи тачно једну цифру различиту од 0.

ВОДОРАВНО:
2: збир цифара од 2 усправно,
4: прост број,
5: збир бројева од 1 усправно, 2 водоравно и 3 усправно.



УСПРАВНО:
1: производ два проста броја,
2: садржалац броја 99,
3: квадрат од 4 водоравно.

Цифра у пољу са знаком „?" је:

А) 8 **Б)** 6 **В)** 4 **Г)** 2 **Д)** постоји више решења